Geometrická postupnosť

Matej Balog

POSTUPNOSŤ je funkcia definovaná na množine prirodzených čísel N:

$$f(n) = a_n \quad \Leftrightarrow \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

pričom funkčnú hodnotu a_n nazývame n-tý člen postupnosti.

Majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Existuje $q \in R$ také, že pre každé $n \in N$ platí $qa_n = a_{n+1} \quad \Leftrightarrow$ postupnosť je **GEOMETRICKÁ** a číslo q sa nazýva **KVOCIENT**.

Pre všetky $n, r, s \in N$ platia vzťahy

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$a_r = a_s q^{r-s}$$

Pre **SÚČET PRVÝCH $n \in N$ ČLENOV** geometrickej postupnosti s_n platí

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad q \neq 1$$

Pre všetky $n \in N, n \geq 2$ platí

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$$

t. j. každý nezáporný člen geometrickej postupnosti okrem prvého je **GEOMETRICKÝM PRIEMEROM** susedných.

MONOTÓNNOSŤ geometrickej postupnosti je daná hodnotou prvého člena a_1 a kvocientu q:

- $q = 1 \quad \Leftrightarrow$ geometrická postupnosť je **KONŠTANTNÁ** (stacionárna)
- $a_1 = 0 \quad \Leftrightarrow$ geometrická postupnosť je **KONŠTANTNÁ** (stacionárna)
- $q < 0 \quad \Leftrightarrow$ geometrická postupnosť je **OSCILUJÚCA**

Nech p a N_0 sú kladné reálne čísla, kde p vyjadruje percentuálny nárast (resp. úbytok) za jednotkové časové obdobie a N_0 pôvodný stav. Potom po n časových obdobiach je stav N

$$N = N_0 \left(1 \pm \frac{p}{100\%}\right)^n$$

Takýto spôsob nárastu finančných prostriedkov sa nazýva **ZLOŽENÉ ÚROKOVANIE**.

Dôkazy

Dôkaz vzorca pre **SÚČET PRVÝCH $n \in N$ ČLENOV** geometrickej postupnosti s_n:

$$s_n(q-1) = q\sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} - \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = a_1\left(\sum_{i=2}^{n+1} q^{i-1} - \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}\right) = a_1(q^n + q^0)$$

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad q \neq 1$$

Príklady z bývalých ročníkov EČ MS

V geometrickej postupnosti je prvý člen nenulový. Súčet prvého a tretieho člena je dvojnásobok súčtu prvých troch členov tejto postupnosti. Akú hodnotu má kvocient q tejto postupnosti?

V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientom q sa $a_1 = q = 5$. Určte najmenšie $n \in N$, pre ktoré bude platiť nerovnosť $a_n > 11222333$.

Podiel štvrtého a prvého člena istej geometrickej postupnosti sa rovná 27. Určte kvocient tejto postupnosti.

Pre ktoré číslo x má nekonečný geometrický rad, ktorého prvé dva členy sú $a_1 = 3x$, $a_2 = 3x^3$, súčet rovný -2?

Rovnica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{x+1}{x-1}$ má práve jeden reálny koreň. Určte ho.

Prvý člen geometrickej postupnosti je $a_1 = -\frac{1}{2}$. Jej štvrtý člen je $a_4 = 32$. Vypočítajte piaty člen a_5 tejto geometrickej postupnosti.

V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je štvrtý člen $a_4 = 54$ a kvocient $q = \frac{1}{3}$. Vypočítajte súčet prvých troch členov tejto postupnosti.